



Zadania na XVII Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Lejki

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap rejonowy

11 marca 2017 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wykaż, że liczba: $\frac{\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}-\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{17-4\sqrt{2}}}$ jest liczbą całkowitą.
2. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c spełniających warunek $ab + bc + ac = 9$, prawdziwa jest nierówność: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \geq 1$.
3. Dany jest okrąg o promieniu r . W okręgu tym poprowadzono średnicę i równoległą do niej cięciwę. Na średnicy tej obrano w odległości a od środka okręgu punkt P . Oblicz sumę kwadratów odległości punktu P od końców poprowadzonej cięciwy.
4. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB . W trójkąt ten wpisano kwadrat $KLMC$, gdzie $K \in AC$, $L \in AB$ oraz $M \in BC$. Wykaż, że suma promieni okręgów wpisanych w trójkąty AKL i MBL równa się promieniowi okręgu wpisanego w trójkąt ABC .
5. Wykaż, że jeżeli równania $x^2 + ax + b = 0$ i $x^2 + cx + d = 0$ o współczynnikach rzeczywistych mają wspólne rozwiązanie rzeczywiste, to $(b - d)^2 = (a - c)(bc - ad)$.

Powodzenia!